第 34 講　関数総合(5)

1　曲線 $y=x^2$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ $(\alpha<0)$ における曲線 C の接線を l とする．また，この接線 l 上の点 P から，曲線 C に l とは異なる接線 m をひく．ただし，点 P の x 座標は p とし，$p>\alpha$ とする．

(1)　接線 m の曲線 C との接点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A と点 B を通る直線が，直線 l と垂直となるとき，点 P の座標を求めよ．

(3)　点 P を(2)で求めたものとする．このとき，点 P を通り，△ABP の面積を二等分する直線の方程式を求めよ．

< Note >

2　3 次関数 $f(x)$ は，次の 2 つの条件を満たすとする．

（条件 1）　関数 $f(x)$ は $x=1$ と $x=2$ で極値をもつ．

（条件 2）　整式 $f(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $-x+2$ である．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

3　曲線 $y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ が放物線 $y=x^2$ と相異なる3点で交わるための実数 a の値の範囲を求めよ.

＜ Note ＞

第34講　関数総合(5)

［1］　$c>0$ とし，$f(x)=x^3-x^2$，$g(x)=x-c$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が接するとき，$c=$ [ア] であり，$-2\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)-g(x)|$ の最大値は [イ] である．

［2］　2つの曲線 $y=2x^3+2p$ と $y=3px^2+12p^2x$ が異なる3つの共有点をもつような p の値の範囲は　$p<-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}<p$ である．

＜ Note ＞

第34講　関数総合(5)

1　曲線 $y=x^2$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ $(\alpha<0)$ における曲線 C の接線を l とする．また，この接線 l 上の点Pから，曲線 C に l とは異なる接線 m をひく．ただし，点Pの x 座標は p とし，$p>\alpha$ とする．

(1)　接線 m の曲線 C との接点Bの座標を求めよ．

(2)　点Aと点Bを通る直線が，直線 l と垂直となるとき，点Pの座標を求めよ．

(3)　点Pを(2)で求めたものとする．このとき，点Pを通り，△ABPの面積を二等分する直線の方程式を求めよ．

(1)　$y=x^2$　より　$y'=2x$

点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線は　$l：y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2=2\alpha x-\alpha^2$　……①

また，点Bの座標を $(\beta,\ \beta^2)$ とおくと，点Bにおける接線は

$y=2\beta x-\beta^2$　……②

①と②の交点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ が点Pであり，その x 座標が p であることから

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=p$　より　$\beta=2p-\alpha$　　よって　$\mathrm{B}\boldsymbol{(2p-\alpha,\ (2p-\alpha)^2)}$

(2)　$\beta\neq\alpha$ より，直線ABの傾きは　$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\beta+\alpha=2p$

よって　$2p\times2\alpha=-1$　　$p=-\dfrac{1}{4\alpha}$　　このとき　$\alpha\beta=\alpha(2p-\alpha)=-\alpha^2-\dfrac{1}{2}$

したがって　$\mathrm{P}\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{4\alpha},\ -\alpha^2-\dfrac{1}{2}\right)}$

(3)　線分ABの中点

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=\left(p,\ 2p^2+\alpha^2+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{4\alpha},\ \alpha^2+\frac{1}{8\alpha^2}+\frac{1}{2}\right) と$$

点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{4\alpha},\ -\alpha^2-\dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線が求める直線である．

よって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{4\alpha}}$

2　3 次関数 $f(x)$ は，次の 2 つの条件を満たすとする．

（条件 1）　関数 $f(x)$ は $x=1$ と $x=2$ で極値をもつ．

（条件 2）　整式 $f(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $-x+2$ である．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

(1)　3 次関数 $f(x)$ が条件 2 を満たすことより

$f(x)=(x^2-3x+1)(ax+b)-x+2$　$(a \neq 0)$　とおける．

このとき　$f(x)=ax^3+(-3a+b)x^2+(a-3b-1)x+b+2$ より

$f'(x)=3ax^2+(-6a+2b)x+(a-3b-1)$

また，条件 1 より　$f'(1)=f'(2)=0$

よって　$-2a-b-1=0$，$a+b-1=0$　より　$a=-2$，$b=3$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=-2x^3+9x^2-12x+5}$

(2)　$f(x)=-(x-1)^2(2x-5)$

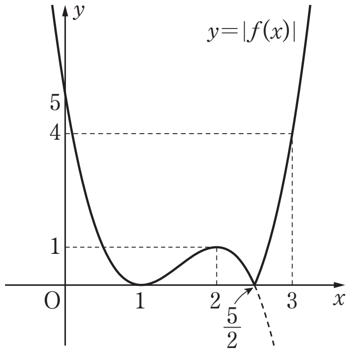
$f'(x)=-6x^2+18x-12$

$=-6(x-1)(x-2)$

よって　$f(x)$ の増減は右表．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

したがって，$y=|f(x)|$ のグラフは右図となる．



$f(0)=5$，$f(3)=-4$ より

$|f(0)|=5$，$|f(3)|=4$

求める最大値は　**5**　（$x=0$ のとき）

3　曲線 $y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ が放物線 $y=x^2$ と相異なる3点で交わるための実数 a の値の範囲を求めよ.

$y=x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4$ と $y=x^2$ より

$x^3-(3a+2)x^2-3a^2-4a+4=x^2$

$x^3-(3a+3)x^2-3a^2-4a+4=0$

$f(x)=x^3-(3a+3)x^2-3a^2-4a+4$ とおくと，題意を満たすのは

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる3つの共有点をもつときである.

$f'(x)=3x^2-2(3a+3)x=3x(x-2a-2)$

$2a+2=0$　つまり　$a=-1$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$　より　$f(x)$ のグラフは増加し，x 軸と3つの異なる共有点をもつことはなく不適.

$a\neq -1$ のとき　$f(x)$ のグラフは $x=0$，$2a+2$ で極値をとる.

$f(0)=-3a^2-4a+4=-(3a-2)(a+2)$

$$\begin{aligned}f(2a+2)&=(2a+2)^3-(3a+3)(2a+2)^2-3a^2-4a+4\\&=8(a+1)^3-12(a+1)^3-3a^2-4a+4\\&=-4(a+1)^3-3a^2-4a+4\\&=-4a^3-15a^2-16a\\&=-a(4a^2+15a+16)\end{aligned}$$

$f(x)$ のグラフが x 軸と3つの異なる共有点をもつのは

$f(0)\cdot f(2a+2)<0$ のときである.

$(3a-2)(a+2)\cdot a(4a^2+15a+16)<0$

$4a^2+15a+16=4\left(a+\dfrac{15}{8}\right)^2+\dfrac{31}{16}>0$　より

$a(3a-2)(a+2)<0$　　したがって　$\boldsymbol{a<-2,\ 0<a<\dfrac{2}{3}}$

第 34 講　関数総合(5)

［1］ $c>0$ とし，$f(x)=x^3-x^2$，$g(x)=x-c$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が接するとき，$c=$ **ア** であり，$-2\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)-g(x)|$ の最大値は **イ** である．

［2］ 2 つの曲線 $y=2x^3+2p$ と $y=3px^2+12p^2x$ が異なる 3 つの共有点をもつような p の値の範囲は　$p<-\dfrac{\boxed{ウ}}{\sqrt{\boxed{エオ}}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\sqrt{\boxed{エオ}}}<p$ である．

解答例

［1］ $f(x)=x^3-x^2$　より　$f'(x)=3x^2-2x$

これが直線 $y=g(x)$ の傾き 1 と等しくなるのは

$3x^2-2x=1$　　$(3x+1)(x-1)=0$　　　$x=-\dfrac{1}{3}$，1

接点が $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{4}{27}\right)$ のとき，$c=-\dfrac{5}{27}$　より　$c>0$ を満たさず不適．

接点が $(1,\ 0)$ のとき，$c=1>0$ より適する．したがって求める c の値は　$c=\mathbf{1}$

このとき　$g(x)=x-1$　より　$f(x)-g(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$-2\leqq x\leqq 2$ における $h(x)$ の増減表は右図

よって，$|f(x)-g(x)|=|h(x)|$ の最大値は

$|h(-2)|=\mathbf{9}$

x	-2	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-9	↗	$\dfrac{32}{27}$	↘	0	↗	3

［2］ $2x^3+2p=3px^2+12p^2x$　より　$2x^3-3px^2-12p^2x+2p=0$

$f(x)=2x^3-3px^2-12p^2x+2p$ とおき，$f(x)$ が x 軸と異なる 3 つの共有点をもつときの p の値の範囲を求める．

$f'(x)=6x^2-6px-12p^2=6(x-2p)(x+p)$

$p=0$ のとき　$f'(x)=6x^2\geqq 0$ より　$f(x)$ は増加関数．よって $f(x)$ が x 軸と異なる 3 つの共有点をもつことはなく不適．

$p\neq 0$ のとき　$f(x)$ は $x=-p$，$2p$ で 2 つの極大値と極小値をもつ．この極大値と極小値の積が負であればよい．

$f(-p)=7p^3+2p=p(7p^2+2)$，$f(2p)=2p-20p^3=2p(1-10p^2)$

$f(-p)\cdot f(2p)<0$　より　$2p^2(7p^2+2)(1-10p^2)<0$

$p^2>0$，$7p^2+2>0$ より　$1-10p^2<0$

したがって　$p<-\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{10}}<p$